Задочна школа по математика
Теория на числата

16 октомври 2017г.

Задача 1. (Шортлист МОМ 2016) Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ със следното свойство: за всяка двойка (m, n) от естествени числа

$$f(m) + f(n) - mn | mf(m) + nf(n).$$

Задача 2. (МОМ 1998) Разглеждаме всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за които

$$f(n^2 f(m)) = mf^2(n)$$

за всеки две естествени числа m и n. Да се намери най-малката възможна стойност на $f(1998)$.

Задача 3. (БОМ 2017) Да се намерят всички функциии $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за които

$$n + f(m) | f(n) + nf(m)$$

за всеки две естествени числа m и n.

Задача 4. (Румъния, 1999) Нека a, b и c са цели числа, за които $a \neq c$ и

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}.$$

Да се докаже, че числото $a^2 + b^2 + c^2$ не е просто.

Задача 5. (МОМ 2001) Нека a, b, c и d са естествени числа, за които $a > b > c > d$ и

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Да се докаже, че числото $ab + cd$ не е просто.

Задача 6. (Санкт Петербург 1999) Естествените числа a, b, c и d са такива, че

$$a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd.$$

Да се докаже, че числото $a + b + c + d$ е съставно.

Задача 7. Да се реши в прости числа уравнението $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

Задача 8. (Жаутиков 2010) Да се реши в прости числа уравнението $p^3 - q^7 = p - q$.

Задача 9. (БОМ 2004) Да се реши в прости числа уравнението $x^y - y^x = xy^2 - 19$.

Задача 10. (Москва 1999) Да се реши в прости числа уравнението $2^p - q^2 = 1999$.

Задача 11. (Китай 2010) Да се намерят всички двойки прости числа (p, q), за които pq дели $5^p + 5^q$.

Задача 12. (Олимпиада за учители, Монголия 2017) Нека $p \geq 5$ е просто число. Да се докаже, че съществуват естествени числа m и n, за които $m + n \leq (p+1)/2$ и $2^m 3^n - 1$ се дели на p.