МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ПРОЛЕТНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

V – VIII КЛАС

Русе, 2018 г.

РЕШЕНИЕ НА ТЕМАТА ЗА 5. КЛАС

Задача 5.1. Да се пресметне $A.0{,}5+B.0{,}0625$, където

$A=20{,}18.237:5{,}045+2{,}018.26750:50{,}45$ и $B=1\frac{1}{3}+2\frac{4}{15}+3\frac{1}{5}+4\frac{2}{15}+5\frac{1}{15}$

Решение: $A=\frac{2018.237}{100}.\frac{1000}{5045}+\frac{2018.26750}{1000}.\frac{100}{5045}=\frac{2018}{5045}.(2370+2675)=2018$ (3т.)

$B=1+2+3+4+5+\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}+\frac{4}{15}+\frac{5}{15}=15+1=16$ (2т.)

$\Rightarrow A.0{,}5+B.0{,}0625=1009+1=1010$ (1т.)

Оценяване: **3 точки** за намиране на A, **2 точки** за намиране на B и **1 точка** за отговор. При грешно пресмятане на A, но вярни частични пресмятания до 2 точки. При грешно пресмятане на B, но вярни частични пресмятания до 1 точка.

Задача 5.2. Александър и Петър наблюдавали светофара на едно кръстовище. Точно когато пристигнали на кръстовището светнала жълтата светлина на светофара. Проследявайки работата му, те измерили по часовник, че времето на червената светлина е $\frac{3}{2}$ пъти по-малко от времето на зелената, а времето на жълтата светлина е 4 пъти по-малко от времето на червената. След като за осемнадесети път угаснала жълтата светлина, светнала зелената и двамата приятели след 17 минути престой пресекли улицата. Колко секунди свети жълтата светлина? (Светлините на светофара се редуват - червена, жълта, зелена, жълта, червена, жълта, зелена и.т.н)

Решение: Нека жълтата светлина свети x секунди (0,5т.). Тогава червената светлина свети $4x$ секунди (0,5), а зелената - $\frac{3}{2}.4x=6x$ секунди. (0,5т.)

Възможните подреждания са:

1 сл. ж з ж ч ж з ж ч.... или 2 сл. ж ч ж з ж ч ж з ...

Т.к. жълтата светлина се е появявала 18 пъти и след нея светва зелена , за да могат двете момчета да пресекат кръстовището, 1 сл. е невъзможен. (2т.)

2 сл. ж ч ж з ж ч ж з ... – жълтите светлини са 18, червените – 9, а зелените – 8. (1т.)

$18x+9.4x+8.6x=17.60$

$18x+36x+48x=1020$

$102x=1020$ (1т.)

$x=1020:102$

$x=10$

Жълтата светлина свети 10 секунди. (0,5т.)

Оценяване: За означаване 1 точка, за изразяване на останалите две светлини 1 точка.

За разглеждане на 1сл. 2 точки и за 2 сл 2 точки и за отговор 1 точка. Ако е разгледан само един случай се дават не повече от 5 точки.

Задача 5.3. Да се намерят последните 4 цифри на числото N = 2018****, ако N е най-малкото осемцифрено число, което се дели на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Решение: Щом се дели на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 се дели на НОК(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)=2520. (2т.)

Тъй като 20180000 : 2520 = 8007 (остатък 2360) (2т.) $\Rightarrow$ трябва да допълним остатъка до 2520 (2т.) $\Rightarrow$ 20180000+(2520 – 2360)=20180160 е търсеното число. (1т.)

Оценяване: 2 **точки** за извод, че НОК дели търсеното число; **2 точки** за извод, че трябва да се допълни остатъка и по 1 **точка** съответно за намиране на остатъка и отговора. Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

Задача 5.4. Дъска 8X8 е разделена на 64 единични квадратчета, които са боядисани в бяло. Оцветете част от квадратчетата в черно така, че до всяко черно квадратче да има точно две съседни черни квадратчета, а до всяко бяло квадратче да има точно две съседни бели квадратчета и

а) броят белите квадратчета да е равен на броят на черните квадратчета;

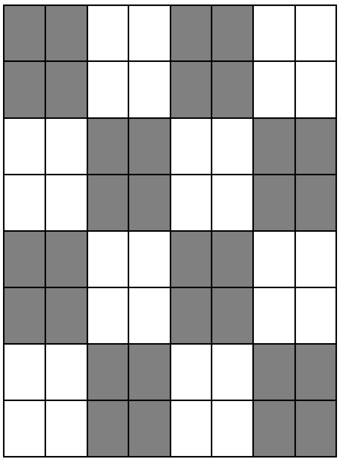
б) белите квадратчета да са 36, а черните квадратчета да са 28

в) белите квадратчета да са 24, а черните квадратчета да са 40.

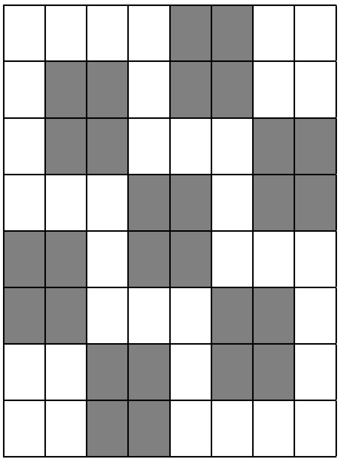
Две квадратчета са съседни, ако имат обща страна.

Решение: Като започнем от горният ляв ъгъл с бяло квадратче и оцветяваме като спазваме условието се получават 8 различни оцветявания. Аналогично ще получим още 8 като започнем с черно.

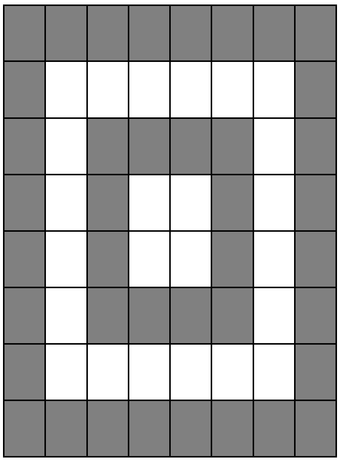
а)



б)



в)



Оценяване: а) 2 точки б) 2 точки в) 3 точки

РЕШЕНИЕ НА ТЕМАТА ЗА 6. КЛАС

Задача 6.1. Във всяко поле на таблица 2×2 е записано цяло число. Съседните в колона числа имат разлика 2, а съседните в ред – частно три. Намерете записаните числа.

Решение: Отг.: $(-3,\ -3, -1, -1)$ и $(1, 1, 3, 3)$

Различните случаи, отговарящи на условията за първия ред и за двете колони, са посочени в четирите таблици:

x	$3x$
$x-2$	$3x-2$

x	$3x$
$x-2$	$3x+2$

x	$3x$
$x+2$	$3x-2$

x	$3x$
$x+2$	$3x+2$

Ако разменим местата на x и $3x$, ще се получат симетрични таблици, които няма да доведат до нови стойности за x. Остава да проверим за кое x е изпълнено условието във втория ред. (2 т.)

Получаваме осем уравнения:

x	$3x$
$x-2$	$3x-2$

$3x - 6 = 3x - 2$ или $x - 2 = 9x - 6$

няма решение. $x = \frac{1}{2}$ решението не е цяло число .

(1 т.)

x	$3x$
$x-2$	$3x+2$

$3x - 6 = 3x + 2$ или $x - 2 = 9x + 6$

няма решение. $x = -1$, числата са $-1, -1, -3, -3$.

(1 т.)

x	$3x$
$x+2$	$3x-2$

$3x + 6 = 3x - 2$ или $x + 2 = 9x - 6$,

няма решение. $x = 1$, числата са $1, 1, 3, 3$.

(1 т.)

x	$3x$
$x+2$	$3x+2$

$3x + 6 = 3x + 2$ или $x + 2 = 9x + 6$

няма решение. $x = -\frac{1}{2}$ решението не е цяло число.

(1т.)

Задача 6.2. От метален прът с форма на цилиндър с радиус r и дължина $2kr$ $(k \in N)$ произвели възможно най-много метални топчета със същия радиус. От металните отпадъци отливали нов метален прът със същия радиус и отново произвели същите топчета. След четвъртото отливане се оказало, че не могат да се произвеждат повече топчета.

а) Ако металният прът е с дължина $2r$, колко пъти обемът на отпадъчният метал е по-малък от обема на топчето.

б) Намерете стойността на k, при която могат да се направят най-много метални топчета?

Решение: Отг: а) два пъти; б) при $k = 54$ произвели 80 топчета .

а) Обемът на отпадъка ще намерим като разлика от обемите на цилиндъра и кълбото. $V_ц = 2r\pi r^2 = 2\pi r^3$, $\quad V_к = \frac{4}{3}\pi r^3$ $(1т.)$ $\Rightarrow V_{отп.} = V_ц - V_к = 2\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$ $(1т.)$ $\Rightarrow$ $V_к = \frac{4}{3}\pi r^3 = 2.\frac{2}{3}\pi r^3 \Rightarrow$ два пъти $(1т.)$.

б) Едно топче се произвежда от цилиндричен прът с радиус r дължина $2r$. Отпадъкът има обем равен на $\frac{1}{3}V_ц$. При четвъртото отливане е останал отпадък по-малък от обема на цилиндъра, следователно $\frac{1}{3}V_ц$ или $\frac{2}{3}V_ц$ $(1т.)$. По-голям отпадък остава от производството на повече топчета, което искаме да намерим. Задачата ще решим отзад напред, като при различните случаи ще разглеждаме тези, при които са произведени повече топчета $(2т.)$.

	Брой произведени топчета $= k$	Отпадък от предходно отливане	Брой произведени топчета $= k$	Отпадък от предходно отливане
четвърто отливане		$\frac{1}{3}V_ц$	0	$\frac{2}{3}V_ц$
Произведено	1	0	2	0
			или 1	$\frac{1}{3}V_ц$
трето отливане		$3.\frac{1}{3}V_ц$	разглеждаме 2	$6.\frac{1}{3}V_ц$
Произведено	3	0	6	0
			или 5	$\frac{1}{3}V_ц$
второ отливане		$9.\frac{1}{3}V_ц$	разглеждаме 6	$18.\frac{1}{3}V_ц$
Произведено	9	0	18	0
			или 17	$\frac{1}{3}V_ц$
първо отливане		$27.\frac{1}{3}V_ц$	разглеждаме 18	$54\frac{1}{3}V_ц$
Произведено	27	0	54	0

Ако $k > 54$ след четвъртото отливане ще остане поне още $\frac{1}{3}V_ц$ $\Rightarrow$ ще може да се произведе ново топче (1т.).

Задача 6.3. Сборът на три естествени числа $a < b < c$ е 2018. При деление на b с $2a$ и на c с $2b$ се получава частно едно и един и същи остатък. Намерете тези числа, в случая когато:

а) число a приема възможно най-голяма стойност;

б) число a приема възможно най-малка стойност.

Решение: Означаваме с r остатъка при описаните деления. Тогава $b = 2a + r$ и $c = 2b + r$. От първото равенство имаме $2b = 4a + 2r$, откъдето $c = 4a + 3r$.

Сега $a + b + c = a + 2a + r + 4a + 3r = 7a + 4r = 2018$ (1 т.).

Следователно a е четно число (1 т.). Тъй като $0 \le r < 7a$, то $7a < 7a + 4r < 11a$, т.е. $7a \le 2018 < 11a$ (1 т.).

а) От ограничението $7a \le 2018$ следва, че възможно най-голямата стойност на a е 288, но при нея остатъкът е $\frac{1}{2}$ (1 т.). Следващата възможна стойност е $a = 286$,при която $r = 4$.

Следователно $a = 286$ е търсената възможно най-голяма стойност. Тогава $b = 576,\ c = 1156$ (1 т.).

б) От ограничението $11a > 2018$ следва, че $a > 183$. Проверяваме за $a = 184$, че остатъкът r не е цяло число (1 т.). При $a = 186$ остатъкът r е 179. Следователно $a = 186$ е търсената възможно най-малка стойност. Тогава $b = 551,\ c = 1281$ (1 т.).

Задача 6.4. Докажете, че за всяко деветнадесетцифрено число, което не съдържа цифрата 0 в десетичния си запис, може да се задраскат няколко цифри, така че полученото число да се дели на 37.

Решение: Числото 37 дели 111 $\Rightarrow$ 37 дели и $a.111 = \overline{aaa}$ (1 т.). За записа на числата са използвани цифрите 1, 2, …, 9 (9 цифри). За запис на деветнадесетцифрено число са необходими 19 цифри, следователно от принципа на Дирихле ще има цифра, която е записана поне 3 пъти (3 т.). Нека означим тази цифра с a. Задраскваме всички цифри без трите цифри a. Остава числото $\overline{aaa} = a.111 = a.3.37$ $\Rightarrow$ полученото число отговаря на условието (3 т.).

РЕШЕНИЕ НА ТЕМАТА ЗА 7. КЛАС

Задача 7.1.

а) Намерете стойностите на параметъра *a*, за които уравнението $||x|+2018-a|=2$ има три различни решения.

б) При кои стойности на параметъра *a* уравненията $x^4+x^2+1=\left(x^2+x+1\right)^2+2\left(x^2+x+1\right)$ и $||x|+2018-a|=2$ имат общо решение.

Решение:

а) Уравнение (1) се свежда до $|x|=a-2016$ и $|x|=a-2020$. Двете уравнения имат точно три различни решения, ако едното има един корен, а другото - две различни решения или ако и двете уравнения имат по две решения, от което едното е общо. След разглеждане на случаи се оказва, че $a=2020$.

За решаване на всяко уравнение – по 1 т. За двата случая – 2 т. Общо за а) 4 точки

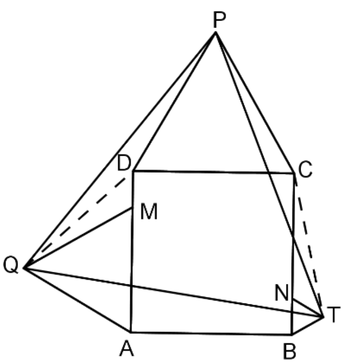
б) Второто уравнение се свежда до $(x+1)\left(x^2+x+1\right)=0$ (0,5 т.) Единственият корен на второто уравнение е $x=-1$. (0,5 т.)

Първото уравнение при a = 2017 има решение x = 1 и x = -1 и при a = 2021 има решение x = 1, x = -1, x = 5 и x = -5. Общият им корен е x = -1. (1 т.)

Задача 7.2. Върху страните *AD* u *BC* на квадрата *ABCD* са избрани съответно точки *M* и *N* такива, че *AM* + *BN* = *AB*. Навън от квадрата са построени равностранните триъгълници: ΔAMQ, ΔBNT и ΔDCP. Да се докаже, че ΔTPQ е равностранен.

Решение: Построяваме отсечките QD и TC . Доказваме, че $\Delta DQM \cong \Delta TCN$ (1,5 т.) според първи признак за еднаквост. Следователно $DQ=TC, \angle DQM=\angle TCN=\alpha$.

Доказваме, че $\angle PDQ=150^{0}+\alpha$, $\angle PCT=150^{0}+\alpha$ (1 т.), от тук $\Delta PQD \cong \Delta PTC$ (I признак) (1,5 т.). Тогава ΔPQT е равнобедрен ($PQ=PT$) и тъй като $\angle QPT = \angle DPC = 60^{0}$, следователно ΔTPQ е равностранен. (2 т.)



Задача 7.3. Иван реже квадрат по права линия на две части. След това на всеки ход реже по същия начин на две части някое от парчетата. След *n* такива рязания, Иван пресмята *височината на рязането*: на всеки триъгълник дава по 2 точки, а на всеки четириъгълник поставя по 1 точка и събира точките (височината на рязането = 2.броя на триъгълниците

+ броя на четириъгълниците). Съществува ли такова число n, че височината на рязането да е по-голяма от 2018?

Решение: Нека a е броят на триъгълниците, а b е броят на четириъгълниците при рязането. Да означим с S_n броят на върховете на получените парчета след n – тото рязане. С всяко рязане по права линия броят на върховете расте с най-много 4 и получените многоъгълници са изпъкнали. Следователно $S_n \leq 4 + 4n$. От друга страна броят на върховете $S_n \geq 3.a + 4.b + 5(n+1-a-b)$. Тогава $4 + 4n \geq 3a + 4b + 5(n+1-a-b)$ $\Rightarrow 2a + b \geq n+1$ т.е. след *2017* рязания височината на рязането ще е по-голяма или равна на *2018*.

Задача 7.4. Върху всяка от девет картички е написано по едно цяло число между 1 и 9, като се изпълнява следното условие: колкото и картички да вземем, сумата от написаните върху тях числа да не се дели на 10. Да се докаже, че върху деветте картички е написано едно и също число.

Решение: Нека написаните числа са $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$. Допускаме, че върху картичките са написани поне две различни числа $a_1 \neq a_2$. Да разгледаме сумите:

$S_1 = a_1,$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

…

$S_9 = a_1 + a_2 + \ldots + a_9$

Ако последната цифра на някои от тези суми е 0 получаваме противоречие с условието.

Ако две различни суми завършват на една и съща цифра от по-голямата сума изваждаме по-малката сума и получаваме отново противоречие с условието.

Остава случая, когато всички последни цифри на сумите $S_1, S_2, \ldots S_9$ са всички различни цифри от 1 до 9. Значи някоя от сумите (например S_k) завършва на a_2 и това не е S_1. Тогава $S_k - a_2$ се дели на 10 и отново получаваме противоречие с условието. Следователно допускането, че има две различни числа $a_1 \neq a_2$ не е вярно, значи на всички картички е написано едно и също число.

РЕШЕНИЕ НА ТЕМАТА ЗА 8. КЛАС

Задача 8.1. Намерете всички естествени прости числа ***p*** и ***q***, за които уравнението $x^2 + px + q = 100$ има два различни цели корена.

Решение: Сумата и произведението на корените не могат да са нечетни едновременно, следователно поне един от коефициентите е равен на 2. (0,5т.).

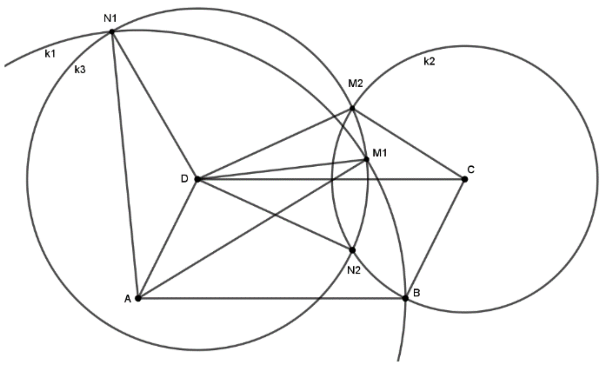
- При $p = q = 2$, уравнението $x^2 + 2x - 98 = 0$ няма цели корени;(0,5т.).
- Нека $q = 2, p$ е нечетно.Корените на уравнението $x^2 + px = 98$ са с различни знаци и ще търсим положителния. В равенството $x(x+p) = 98$ множителите са с различначетност. $98 = 2.7^2$ и следователно: $p = 7, 47, 97$.
- Нека $p = 2, q$ е нечетно. Уравнението може да се запише: $(x+1)^2 = 101 - q$, т.е. $101 - q$ е четен точен квадрат и може да бъде: 64, 36, 16 или 4. След проверка, решенията са: $q = 37$ или 97.

  За всяко вярно намерено решение по 1 т.

Отговор: (*p*,*q*) = (2, 37); (2, 97); (7, 2); (47, 2); (97, 2)

Задача 8.2. Даден е успоредник *ABCD*, за който $AB = 6\,cm$ и $AD = 2\sqrt{3}\,cm$. Окръжност k_1 с център във върха *A* минава през върха *B*. Втора окръжност k_2 с център точка *C* също минава през върха *B*. Окръжност k_3 с произволен радиус и център точка *D* пресича k_1 и k_2 съответно в точките M_1, N_1 и M_2, N_2. Намерете отношението $M_1N_1 : M_2N_2$.

Решение: $\triangle ADM_1 \cong \triangle CM_2D$ по III признак. (2 т.) Следователно имат равни лица. $\triangle DM_1N_1$ равнобедрен и M_1N_1 е удвоеното разстояние от точка M_1 до AD, т.е. дължината на M_1N_1 е два пъти по-голяма от височината в $\triangle ADM_1$ (1 т.). Аналогично дължината на M_2N_2 е два пъти по-голяма от височината към страната *CD* в $\triangle CM_2D$. (1т.)



Следователно $M_1N_1 : M_2N_2 = 6 : 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ (2 т.).

Задача 8.3. Полетата на таблица 5Х8 отначало са бели. На всеки ход се избира правоъгълник от три полѐта и всяко от тях се преоцветява от бяло в черно или обратно.

а) Колко най-много черни полѐта може да има в таблицата в даден момент?

б) Начертайте всички възможни постижими таблици с максимален брой черни полѐта.

в) определете минималния брой ходове, с които може да бъде получена всяка от таблиците в б).

Решение: Да номерираме полетата, както следва:

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2

При всеки ход се променя цветът на точно по едно поле с 1, 2 и 3, така че броят на черните полета от всеки вид трябва да е еднакъв. Но има 14 полѐта от вид 2 и по 13 от останалите видове, така че поне едно поле от вид 2 ще е бяло. Ако това поле е единствено, то трябва да носи номер 2 и при двете номерации, а такива са само полетата в ред 3, колони 3 или 6. (4 т.)

Всяко поле с номер 1 трябва да бъде преоцветено, така че са нужни поне 13 хода. (1 т.) В долната таблица е показано как може получим бяло поле само в ред 3, колона 3 с 13 хода (правоъгълниците са обозначени с 13 различни букви): (1 т.)

a	a	a	c	d	e	e	e
b	b	b	c	d	f	f	f
g	h		c	d	k	k	k
g	h	i	i	i	l	l	l
g	h	j	j	j	m	m	m

Аналогично постъпваме за полето в ред 3, колона 6. (1 т.)

Отговор: а) 39 черни полѐта; б) таблица от черни полѐта, освен полето в ред 3, колони 3 или 6; в) 13 хода.

Задача 8.4 Докажете, че най-малкото естествено n, за което равенството $50.i^n + 7.j^n = 2018k^n$ е вярно само за краен брой цели числа i, j, k, е $n = 3$.

Решение: При $n = 1$ има безбройно много решения, например $i = 37m$, $j = 24m$, $k = m$ за всяко цяло m (1 т.). При $n = 2$ има безбройно много решения, например $i = 19m$, $j = 4m$, $k = 3m$ за всяко цяло m (2 т.). Нека $n = 3$. Явно $(0;0;0)$ е решение. Да допуснем, че има и друго решение; след съкращаване на най-големия общ делител на k, m, n можем да считаме, че той е 1 (1 т.). При деление с 7 остатъците на точните трети степени могат да са само 0 и ± 1 (1 т.). Понеже 2018 дава остатък 2 при деление на 7, равенство по модул 7 може да има само ако k и n се делят на 7 (1 т.). Но тогава $7m^3$ се дели на 7^3, така че и m се дели на 7: противоречие (1 т.).

Задачите са предложени:

5.1 и 5.3 Иван Ангелов; 5.2 Катя Чалъкова; 5.4 Емил Карлов

6.1 и 6.4 Велислав Йончев, 6.2 и 6.3 Таня Тонова

7.1 и 7.3 Йовка Николова; 7.2 Юлиан Цветков; 7.4 Емил Карлов

8.1 и 8.2 Гергана Николова; 8.3 и 8.4 Ивайло Кортезов

ДОЦ. Д-Р ИВАЙЛО СТАРИБРАТОВ
Председател на Националната комисия

За мнения и препоръки: math_4_8@schoolmath.eu