МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ „АТАНАС РАДЕВ“ ЯМБОЛ
НАЦИОНАЛЕН КОНКУРС ПО МАТЕМАТИКА
„РОМАН ХАЙНАЦКИ“ 2016
електронен вариант

6. клас

6.1. Параход по Дунава минава разстоянието от Русе до Виена за седем дни. Същият параход със същата мощност минава разстоянието от Виена до Русе за пет дни. За колко дни сал ще премине разстоянието от Виена до Русе?

Решение.

Нека разстоянието от Русе до Виена е 35.x км. Скоростта на парахода срещу течението е 5x км на ден, а скоростта на парахода по течението е 7x км на ден . Следователно скоростта на течението е x км на ден и салът ще вземе разстоянието от Виена до Русе за 35 дни.

6.2. За естествените числа a, b и c е изпълнено равенството:

$$(a + b) \,.\, c = a \,.\, b$$

Може ли числото $(a + b)$ да е просто?

Решение.

Нека числото $a + b = p$ е просто. Получаваме: $p \,.\, c = a \,.\, b$ т.е. p дели или само a или само b, което е невъзможно, защото $p > a$ и $p > b$.

6.3. Всеки две от седем планети на слънчева система са на различно разстояние. На всяка от планетите стои астроном и наблюдава с телескоп най-близката от планетите и никоя друга. Докажете, че има планета, която не се наблюдава от нито един астроном.

Решение.

Нека планетите са $P_1, P_2, P_3, \dots, P_7$, а астрономите да са $A_1, A_2, A_3, \dots, A_7$.
Астрономът A_1 е от планетата P_1 и т.н. астрономът A_7 е от планетата P_7. Нека разстоянието P_1P_2 е най-малкото разстояние от всички възможни разстояния (има такова разстояние). Тогава астрономът A_1 наблюдава планетата P_2, а астрономът A_2 наблюдава планетата P_1.

Ако някой друг астроном например A_3 наблюдава също планетата P_1, то остават 5 планети и само 4 астронома по тях, като всеки астроном наблюдава само една планета т.е. една от планетите не се наблюдава.

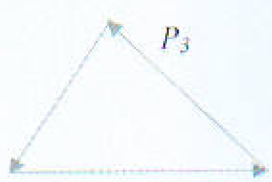
Ако няма астроном, който да наблюдава планетата P_1 или планетата P_2, то тези две планети ще ги отстраним заедно с астрономите им.

Новата задача е за 5 астронома от 5 различни планети.

Отново намираме най – малкото разстояние от всички възможни разстояния. Двамата астрономи ще наблюдават планените си един друг. Ако трети астроном гледа една от двете избрани планети, то остават 2 астрономи за 3 планети.

Ако няма астроном, който да наблюдава избраните две планети – отстраняваме планетите и астрономите им.

Остават три планети и трима астрономи:



Показаното на чертежа наблюдение е невъзможно, защото $P_2P_3 < P_1P_2$ (астрономът A_2 трябва да наблюдава P_3) освен това $P_3P_1 < P_2P_3$ (астрономът A_3 наблюдава планетата A_1), но от двете горни неравенства следва, че $P_1P_2 > P_2P_3 > P_3P_1$ т.е.

P_1 P_2 астрономът A_1 трябва да наблюдава планетата P_3, а не планетата P_2.

Следователно вероятното наблюдение на планетите е от вида:

и планетата P_1 не се наблюдава от астроном.

6.4. Селянин продавал орехи на пазара. Първият купувач купил един орех. Вторият купувач купил два ореха и т.н. всеки следващ купувач купувал два пъти повече орехи от предния купувач (орехите били едри и хубави), докато последният купувач купил 1 024 ореха. Колко ореха продал него ден селянинът?

Решение.

Търсим сумата А = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024.

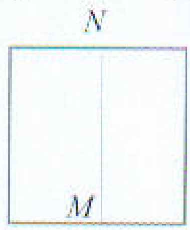
Прибавяме по един орех от двете страни на равенството:

А + 1 = 1 + 1 + 2 + ... + 1024 = 2.2 + 4 + ... + 1024 = 2.4 + 8 + ... + 1024 = 2.8 + 16 + ... + 1024 = ... = 2.1024 = 2048 т.е. А = 2047 ореха.

6.5. Може ли квадрат с обиколка дробно число, да нарежем на правоъгълници и всеки правоъгълник да е с обиколка цяло число?

Решение. Нека страната на квадрата е равна на 2/3 и обиколката му е 8/3

2/3



(8/3 не е цяло число).

Ако M и N са средите на страните на квадрата, то двата правоъгълника са с обиколки равни от по 2 см.

6.6. Намерете естествено число N, което разделено на 12 да дава остатък $r > 0$, разделено на 18 да дава остатък $q > 0$, разделено на 3 да дава остатък $t > 0$ и сумата от трите остатъци да е: $r + q + t = 15$.

Решение.

От равенствата $N = m\,.\,12 + r$ и $N = n\,.\,18 + q$ следва, че остатъците r и q имат една и съща четност (и двата остатъка имат четността на числото N). Тъй като сумата на трите остатъка е 15, то остатъка t при деление на 3 $(0 \leq t < 3)$ е нечетно число т.е. $t = 1$.

Избираме число N, което при деление на 3 да има остатък 1, а при деление на 12 и на 18 да има остатък 7. Това е числото 43.

7.4. Покажете, че ***няма*** естествени числа a и b, че и двете числа $A = a^2 + b$ и $B = b^2 + a$, да са точни квадрати.

Решение.

Няма такива естествени числа. Нека $b < a$, тогава $a^2 < A = a^2 + b < a^2 + 2.a + 1 = (a+1)^2$.

Между два последователни точни квадрата няма точен квадрат.

Следователно A не е точен квадрат.

При $a < b$ числото B не е точен квадрат.